数理解析研究所講究録
589巻 1986年 32-51

楕円単数と2変数p-進L-関数

九大理　小塚和人（Kazuhito Kozuka）

§1. 序

pを奇素数とし，各整数$n \geq 0$に対し，$\zeta_{p^{n+1}}$を1の原始p^{n+1}乗根とする。$\mathbb{Q}_p$をp進有理数体，U_nを$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$の主単数群とする。$C_n$を$\mathbb{Q}(\zeta_{p^{n+1}})$の円単数で，$U_n$に属するもの全体のなす群とし，$C_n$の$U_n$における閉包を$\bar{C}_n$と書き，$Y_\infty = \varprojlim U_n/\bar{C}_n$とおく。ここに逆極限は，ノルムに関するものである。このとき，Y_∞は自然に岩沢代数$\mathbb{Z}_p[[T]]$上の加群になり，$Gal(\mathbb{Q}_p(\zeta_p)/\mathbb{Q}_p)$の自明でない各偶指標$\kappa$に対し，$Y_\infty$の$\kappa$-固有空間のcharacteristic power seriesは，p進L-関数の補間級数と$\mathbb{Z}_p[[T]]$において同伴になる。これは，Coleman power seriesを用いると，次の方針で証明される。

$\zeta_{p^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$を，$\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$となるようにとる。このとき，$p$と素な$a \in \mathbb{Z}$に対し，$(\zeta_{p^{n+1}}^a - 1/\zeta_{p^{n+1}} - 1)_{n=0}^\infty \in \varprojlim_{(Norm)} U^\times_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}$となる。ここに，$U^\times_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})}$は，$\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n+1}})$の単数群である。$C_a(T) = (1+T)^a - 1/T$とおくと，$\zeta_{p^{n+1}}^a - 1/\zeta_{p^{n+1}} - 1 = C_a(\zeta_{p^{n+1}} - 1)$ $(\forall n \geq 0)$。即ち，$C_a(T)$は，乗

法的形式群G_mの Tate-module $\varprojlim (G_m)_{p^{n+1}}$ の生成元 $(\zeta_{p^{n+1}}-1)_{n=0}^{\infty}$ に関する $(\zeta_{p^{n+1}}^{a}-1/\zeta_{p^{n+1}}-1)_{n=0}^{\infty}$ の Coleman power series である．このとき，parameter $Z=\log(1+T)$ による対数微分 $d/dZ \log C_a(T)$ の係数に，Bernoulli 数が現われる．従って，巾級数 $d/dZ \log C_a(T)$ と，$Gal(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ の自明でない各偶指標kに付随したΓ-変換の補間級数から，Cyclotomic なp進L-関数の補間級数が容易に構成され，さらにY_∞のk-固有空間の characteristic power series がこの補間級数であることも導かれる。

上記の内容の elliptic な場合での analogy は，1変数の場合については Coates-Wiles[1]，Goldstein[3]等で，2変数の場合の結果は，Yager[7]で述べられている．

ここでは，Yager[7]における楕円単数の定義を若干修正して，改良された結果を述べる。主結果は，§6，§7で紹介するが，これは，Goldstein[3]の定理3.10.1)と定理3.11.1)の2変数の場合における analogy に相当する．

§2．記法

Kを複素数体$\mathbb{C}$に含まれる類数1の虚2次体，$-d_K$を，Kの判別式，$\mathcal{O}$をKの整数環とする．EをK上定義された楕円曲線で，$\mathcal{O}$による虚数乗法を持つものとし，ψ_EをEのK上の量指標，$\mathfrak{f}$をψ_Eの導手とする．Eの Weierstrass model

(2.1) $$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

を，$g_2, g_3 \in \mathcal{O}$ で，(2.1) の判別式が $6\mathfrak{f}$ の素因子のみで割り切れるように固定する．$\wp(z)$ を，(2.1) に関する Weierstrass $\wp$-関数，L を $\wp(z)$ の周期格子とし，$L = \Omega_\infty \mathcal{O}$ なる $\Omega_\infty \in \mathcal{O}$ を固定する．$\xi(z) = (\wp(z), \wp'(z))$ とおく．$\mathcal{O}$ の元 α を，E の自己準同型 $\xi(z) \mapsto \xi(\alpha z)$ とみなすことにより，$\mathcal{O}$ と $\mathrm{End}(E)$ とを同一視する．

K の素イデアル $\mathfrak{p}$ を，$(\mathfrak{p}, 6d_K N\mathfrak{f}) = (1)$ かつ，$\mathfrak{p}$ の絶対次数が 1 となるようにとり，$p = N\mathfrak{p}$ とおく．(p) は K で完全分解する：$(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$．$\pi = \psi_E(\mathfrak{p})$，$\pi^* = \psi_E(\mathfrak{p}^*)$ とおく．π, π^* はそれぞれ，$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^*$ の生成元である．各 $\alpha \in \mathcal{O}$ に対し，$E_\alpha = \mathrm{Ker}(E \xrightarrow{\alpha} E)$ と書くことにし，$0 \leq m, n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$F_m = K(E_{\pi^{*m+1}}), \quad K_n = K(E_{\pi^{n+1}}), \quad K_{n,m} = F_m(E_{\pi^{n+1}}),$$
$$F_\infty = \bigcup_{m \geq 0} F_m, \qquad K_\infty = \bigcup_{n,m \geq 0} K_{n,m}$$

とおく．このとき $\mathfrak{p}$ は，拡大 F_∞/K で不分岐，$\bigcup_{n \geq 0} K_n/K$ で完全分岐する．さらに，$\mathfrak{p}$ の上にある F_∞ の素イデアルの個数は有限である．

$\mathfrak{p}$ の上にある F_∞ の素イデアル $\mathfrak{p}_\infty$ を1つ固定し，$\mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}_\infty \cap F_m$ とおく．$\mathfrak{p}$ の上にある F_m の各素イデアル ν に対し，$\mathcal{F}_m^{(\nu)}$ を F_m の ν による完備化とし，$\mathcal{F}_m^{(\nu)}$ の整数環を，$\mathcal{O}_m^{(\nu)}$ と書く．ν の上にある $K_{n,m}$ の素イデアルは唯一つである．この素イデアルによる $K_{n,m}$ の完備化を，$\mathcal{K}_{n,m}^{(\nu)}$ と書く．特に，$\nu = \mathfrak{p}_m$ のときは，添字の ν を省略し，単に $\mathcal{F}_m, \mathcal{O}_m, \mathcal{K}_{n,m}$ と書くことにする．$K_\mathfrak{p}$ を K

の$\mathfrak{q}$による完備化, $\mathcal{O}_\mathfrak{q}$を$K_\mathfrak{q}$の整数環とし, 以下$\mathcal{O}_\mathfrak{q}$を$\mathbb{Q}_p$の整数環$\mathbb{Z}_p$と同一視する.

$\tau_\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}, F_\infty/k) \in Gal(F_\infty/k)$ とおく. $\mathfrak{F}_\infty = \bigcup_{m \geq 0} \mathfrak{F}_m$ とおくと, $\tau_\mathfrak{q}$は拡大 $\mathfrak{F}_\infty/K_\mathfrak{q}$ の Frobenius 同型を導入する. この同型も$\tau_\mathfrak{q}$と書くことにする.

$G_\infty = Gal(K_\infty/k)$, $\Gamma = Gal(K_\infty/K_{0,0})$, また, $E_{\pi^\infty} = \bigcup_{n \geq 0} E_{\pi^{n+1}}$, $E_{\pi^{*\infty}} = \bigcup_{m \geq 0} E_{\pi^{*m+1}}$ とおく. このとき, G_∞のE_{π^∞}及び$E_{\pi^{*\infty}}$への作用を表わす標準的な指標 $\kappa_1 : G_\infty \to \mathbb{Z}_p^\times$ 及び $\kappa_2 : G_\infty \to \mathbb{Z}_p^\times$ が定義され, $(\kappa_1, \kappa_2) : G_\infty \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times$, $\Gamma \cong (1+p\mathbb{Z}_p) \times (1+p\mathbb{Z}_p)$ となる. さらに, $G_\infty = \Gamma \times \Delta$ と分解される. ここにΔは位数$p-1$の巡回群2個の直積で, 自然に$Gal(K_{0,0}/k)$と同一視される. $\chi_1 = \kappa_1|_\Delta$, $\chi_2 = \kappa_2|_\Delta$ とおく. このとき, $\{\chi_1, \chi_2\}$ は $Hom(\Delta, \mathbb{Z}_p^\times)$ を生成する.

任意の$\mathbb{Z}_p[\Delta]$-加群Aと, $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, $A^{(i_1,i_2)}$をAの$\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間とする. Aは,

(2.2) $$A = \bigoplus_{(i_1,i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2} A^{(i_1,i_2)}$$

と分解される.

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]]$ とおく. $1+p\mathbb{Z}_p$の位相的生成元uを固定し, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ を, $\kappa_1(\gamma_1) = \kappa_2(\gamma_2) = u$, $\kappa_1(\gamma_2) = \kappa_2(\gamma_1) = 1$ を満たすΓの元とする. このとき, Γは$\mathbb{Z}_p$上$\{\gamma_1, \gamma_2\}$によって生成される. BをΓが連続に作用するcompactな$\mathbb{Z}_p$-加群とすると, Bには,

$$(1+T_1)x = \gamma_1 x, \quad (1+T_2)x = \gamma_2 x \quad (\forall x \in B)$$

によって，Λ-加群の構造が一意に定められる．

$\omega_{n,1}=(1+T_1)^{p^n}-1$,　$\omega_{m,2}=(1+T_2)^{p^m}-1$　とおく．

ガロア群G_∞は，環$\prod_{v|\mathfrak{f}} K_{n,m}^{(v)}$，$\prod_{v|\mathfrak{f}} \mathcal{F}_m^{(v)}$に自然に作用する．$K_{n,m}$，$F_m$は，これらの環にdiagonalに埋め込まれる．$\mathcal{O}_m=\prod_{v|\mathfrak{f}}\mathcal{O}_m^{(v)}$とおく．

$\mathcal{U}_{n,m}'^{(v)}$，$\mathcal{U}_{n,m}^{(v)}$をそれぞれ$K_{n,m}^{(v)}$の単数群，主単数群とし，

$$\mathcal{U}_{n,m}'=\prod_{v|\mathfrak{f}}\mathcal{U}_{n,m}'^{(v)},\quad \mathcal{U}_{n,m}=\prod_{v|\mathfrak{f}}\mathcal{U}_{n,m}^{(v)}$$
$$\mathcal{U}_\infty'=\varprojlim \mathcal{U}_{n,m}',\quad \mathcal{U}_\infty=\varprojlim \mathcal{U}_{n,m}$$

とおく．ここに，逆極限はノルムに関するものである．このとき，群環$\mathbb{Z}_p[G_\infty]$は自然に$\mathcal{U}_\infty$に作用し，従って$\mathcal{U}_\infty$はcompactなΓ-加群かつΛ-加群になる。

$\hat{E}$を，Eの演算をparameter t：

(2.3)　　$t=-2x/y=-2\wp(z)/\wp'(z)=\varepsilon(z)$

によって展開して得られる形式群とする．zを加法的形式群G_aのparameterとみなすと，$\varepsilon(z)$は$\hat{E}$のexponential mapとなる．$\lambda:\hat{E}\simeq G_a$を$\hat{E}$のlogarithmとする．

$\mathcal{F}_\infty$の代数閉包の完備化を$\mathbb{C}_p$と書き，ord_pを，$ord_p(p)=1$と正規化した$\mathbb{C}_p$の加法的付値とする．

Kの整イデアル$\mathfrak{g}$に対し，$\mathfrak{g}\cap\mathbb{Z}$の正の生成元を$k_\mathfrak{g}$と書くことにする。また，$Cl(\mathfrak{g})$をKの$\mathfrak{g}$を法とするStrahl類群，$R_\mathfrak{g}$を$\mathfrak{g}$を法とするKのStrahl類体とする．$Gal(K_{n,m}/K)$の指標$\chi$

に対し，f_χ を $\mathrm{Ker}\,\chi$ の固定体の K 上の導手とする．f_χ が g を割り切るとき，χ は reciprocity map を経て，$Cl(g)$ の ~~導手と~~ 指標を導入する．この指標を χ' と書くことにする．特に $g=f_\chi$ のとき，χ' は $Cl(f_\chi)$ の原始的指標になる．これを，$\hat{\chi}$ と書くことにする．

§3．楕円単数

複素平面内の任意の格子 $\mathcal{L}$ に対し，

$$\sigma(z,\mathcal{L}) = z\prod_{\substack{w\in\mathcal{L}\\ w\neq 0}} (1-z/w)\exp\left((z/w)+\tfrac{1}{2}(z/w)^2\right)$$

$$\theta(z,\mathcal{L}) = \Delta(\mathcal{L})\exp\left(-6g_2(\mathcal{L})z^2\right)\sigma(z,\mathcal{L})^{12}$$

とおく。ここに，$\Delta(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の判別式で，$g_2(\mathcal{L}) = \lim_{s\to 0^+}\sum_{\substack{w\in\mathcal{L}\\ w\neq 0}} w^{-2}|w|^{-2s}$ である。

K の任意の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し，

$$\Theta(z,\mathfrak{a}) = \theta(z,L)^{N\mathfrak{a}}\big/\theta(z,\mathfrak{a}^{-1}L)$$

とおく．$\Theta(z,\mathfrak{a})$ は，格子 L に関する楕円関数となる。

各 $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，f と $f_{\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}}$ の最大公約イデアルを $f^{(i_1,i_2)}$ と書き，K のイデアル $\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}$ を，$f\subseteq\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}\subseteq f^{(i_1,i_2)}$ となるように固定する．Yager〔7〕では，$\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}=f$ の場合が扱われた．ここでは，$\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}=f^{(i_1,i_2)}$ 及び $\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}=f$ の場合が後に重要になるが，しばらくこの制限を設けずに議論を進める．

$\mathfrak{C}^{(i_1,i_2)}$ の生成元 $c^{(i_1,i_2)}$ を固定し，$0\leq m,n\in\mathbb{Z}$ に対し，

$$F_m^{(i_1,i_2)} = F_m(E_{c^{(i_1,i_2)}}),\quad K_{n,m}^{(i_1,i_2)} = K_{n,m}(E_{c^{(i_1,i_2)}})$$

とおく．虚数乗法論により，

$$R_{[(i_1,i_2)\mathfrak{g}^{*m+1}]} \subseteq F_m^{(i_1,i_2)} \subseteq R_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{*m+1}}, \quad R_{[(i_1,i_2)\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}]} \subseteq K_{n,m}^{(i_1,i_2)} \subseteq R_{\mathfrak{f}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}$$

となる．$\rho_m^{(i_1,i_2)} = \Omega_\infty / c^{(i_1,i_2)}\pi^{*m+1}$ とおく．$B_m^{(i_1,i_2)}$ を，K の $\mathfrak{f}\mathfrak{g}^*$ と素な整イデアルの集合で，$\{(\mathfrak{b}, F_m^{(i_1,i_2)}/K) ; \mathfrak{b} \in B_m^{(i_1,i_2)}\}$ が重複なく $Gal(F_m^{(i_1,i_2)}/F_m)$ に一致するものとする．$\mathcal{J}$ を $6p\mathfrak{f}$ と素な K の整イデアル全体の集合とする．各 $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}$ に対し，

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z, \mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{b} \in B_m^{(i_1,i_2)}} \Theta(z + \psi_E(\mathfrak{b})\rho_m^{(i_1,i_2)}, \mathfrak{a})$$

とおく．このとき，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z, \mathfrak{a})$ は，F_m 係数の $\wp(z)$ と $\wp'(z)$ の有理関数となり，$B_m^{(i_1,i_2)}$ のとり方にはよらない．

$\mathcal{S} = \{\mu : \mathcal{J} \to \mathbb{Z} \mid \mu(\mathfrak{a}) = 0$ for almost all $\mathfrak{a} \in \mathcal{J}$, $\sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}} (N\mathfrak{a} - 1)\mu(\mathfrak{a}) = 0\}$ とおき，各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し，

$$\Theta(z; \mu) = \prod_{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}} \Theta(z, \mathfrak{a})^{\mu(\mathfrak{a})}, \quad \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z; \mu) = \prod_{\mathfrak{a} \in \mathcal{J}} \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z, \mathfrak{a})^{\mu(\mathfrak{a})}$$

とおく．

$\tau_n = \Omega_\infty / \pi^{n+1}$, $u_n = \varepsilon(\tau_n)$ とおく．$\varepsilon_n \in \mathcal{O}$ を $\varepsilon_n \pi^* \equiv 1 \pmod{\mathfrak{g}^{n+1}}$ なるものとする．このとき，$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)} = \{\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1}\tau_n ; \mu) \mid \mu \in \mathcal{S}\}$ とおくと，$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)}$ は，$K_{n,m}$ の単数群の G_∞-部分群となる．

各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(z; \mu) \in F_m(\wp(z), \wp'(z))$ となるから，各 $\sigma \in Gal(F_\infty/K)$ に対し，$\Lambda_m^{(i_1,i_2)\sigma}(z; \mu)$ が定義される．

$$e_{n,m}^{(i_1,i_2)}(\mu) = \Lambda_m^{(i_1,i_2)\tau_{\mathfrak{g}}^{-n}}(\varepsilon_n^{m+1}\tau_n ; \mu), \quad e^{(i_1,i_2)}(\mu) = \left(e_{n,m}^{(i_1,i_2)}(\mu)\right)_{n,m \geq 0}$$

とおく．このとき，diagonal map により $C_{n,m}'^{(i_1,i_2)} \subseteq \mathcal{U}_{n,m}'$ とみると，$e^{(i_1,i_2)}(\mu) \in \mathcal{U}_\infty'$ となる．

一般に，$\beta=(\beta_{n,m}^{(\upsilon)})_{n,m\geq 0}\in\mathcal{U}_\infty'$ とすると，各 $0\leq m\in\mathbb{Z}$ 及び $\mathfrak{g}$ の上にある F_m の各素イデアル υ に対し，Coleman power series $C_{m,\beta}^{(\upsilon)}(T)\in\mathcal{O}_m^{(\upsilon)}[[T]]$ が存在して，$\beta_{n,m}^{(\upsilon)}=C_{m,\beta}^{(\upsilon)\,\tau_{\mathfrak{g}}^{-n}}(u_n)$ $(\forall n\geq 0)$ が成り立つ（[2], [7]）。$\mathcal{O}_m[[T]]=\prod_{\upsilon|\mathfrak{g}}(\mathcal{O}_m^{(\upsilon)}[[T]])$ と書く．これは，G_∞-加群になる．$C_{m,\beta}(T)=(C_{m,\beta}^{(\upsilon)}(T))_{\upsilon|\mathfrak{g}}\in\mathcal{O}_m[[T]]$ とおく．

定理3.1．各 $\mu\in\mathcal{S}$ に対し，

$$C_{m,e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(T)=\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\pi^{*-(m+1)}\lambda(T);\mu)$$

である．

§4．2変数 Γ-変換

本節では，後で用いられる2変数 Γ-変換の基本的性質を述べる．

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ を $\mathbb{C}_p$ の整数環，μ を $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measure とする．このとき，$\mu$ に巾級数

(4.1) $\quad f_\mu(T_1,T_2)=\sum_{n,m\geq 0}\left(\int_{\mathbb{Z}_p^2}\binom{x_1}{n}\binom{x_2}{m}d\mu\right)T_1^nT_2^m\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$

が対応し，対応 $\mu\mapsto f_\mu$ は，$\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$-値 measures 全体から，$\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ への全単射になる．$f(T_1,T_2)\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ に対し，f に対応する measure を μ_f と書くことにする．

$x\in\mathbb{Z}_p^\times$ は，$x=\omega(x)\langle x\rangle$ と一意に分解される．ここに $\omega(x)$ は，1の $p-1$ 乗根，$\langle x\rangle\equiv 1 \pmod p$ である．$l(x)\in\mathbb{Z}_p$ を，$\langle x\rangle=u^{l(x)}$ なる $\mathbb{Z}_p$ の元とする．

$(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$，$f\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1,T_2]]$ に対し，Γ-変換

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)} : \mathbb{Z}_p^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$$

は,

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)}(s_1, s_2) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \langle x_1 \rangle^{s_1} \langle x_2 \rangle^{s_2} \omega^{i_1}(x_1) \omega^{i_2}(x_2)\, d\mu_f$$

によって定義される. さらに,

$$f^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = \sum_{n,m\geq 0} \left(\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \binom{\ell(x_1)}{n} \binom{\ell(x_2)}{m} \omega^{i_1}(x_1) \omega^{i_2}(x_2)\, d\mu_f \right) T_1^n T_2^m \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$$

とおくと,

$$\Gamma_f^{(i_1,i_2)}(s_1, s_2) = f^{(i_1,i_2)}(u^{s_1}-1,\ u^{s_2}-1)$$

が成り立つ.

υ を導手が p^m の Dirichlet 指標とするとき, 任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し, $f_{(\upsilon,1)}$, $f_{(1,\upsilon)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ を,

(4.2) $\qquad f_{(\upsilon,1)} = 1/\tau(\upsilon^{-1}, \zeta_{p^m}) \cdot \sum_{a=1}^{p^m} \upsilon^{-1}(a) f(\zeta_{p^m}^a (1+T_1)-1,\ T_2)$

(4.3) $\qquad f_{(1,\upsilon)} = 1/\tau(\upsilon^{-1}, \zeta_{p^m}) \cdot \sum_{a=1}^{p^m} \upsilon^{-1}(a) f(T_1,\ \zeta_{p^m}^a (1+T_2)-1)$

によって定義する. ここに, ζ_{p^m} は任意の 1 の p^m 乗根, $\tau(\upsilon^{-1}, \zeta_{p^m}) = \sum_{a=1}^{p^m} \upsilon^{-1}(a) \zeta_{p^m}^a$ で, (4.2), (4.3) の右辺は, ζ_{p^m} のとり方にはよらない. υ_1, υ_2 が導手が p 巾の Dirichlet 指標のとき, $(f_{(\upsilon_1,1)})_{(1,\upsilon_2)} = (f_{(1,\upsilon_2)})_{(\upsilon_1,1)}$ である. この巾級数を, $f_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$ と書く.

$(j, k) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とすると,

$$\Gamma_{f_{(\omega^j, \omega^k)}}^{(i_1,i_2)}(s_1, s_2) = \Gamma_f^{(i_1+j,\ i_2+k)}(s_1, s_2)$$

となる. ψ_1, ψ_2 が第2種 Dirichlet 指標のとき,

$$\Gamma_{f_{(\psi_1,\psi_2)}}^{(i_1,i_2)}(s_1, s_2) = f^{(i_1,i_2)}(\psi_1(u) u^{s_1}-1,\ \psi_2(u) u^{s_2}-1)$$

となる. さらに,

$$\left(f_{(\varphi_1,\varphi_2)}\right)_{(w^i, w^k)} = f_{(\varphi_1 w^i,\ \varphi_2 w^k)}$$

が成り立つ.

$f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ に対し,

$$U_1 f = f(T_1, T_2) - 1/p \sum_{a=1}^{p} f(\zeta_p^a(1+T_1)-1, T_2)$$

$$U_2 f = f(T_1, T_2) - 1/p \sum_{a=1}^{p} f(T_1, \zeta_p^a(1+T_2)-1)$$

とおく. $U_1 f, U_2 f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ である.

$D_j = (1+T_j)\,\partial/\partial T_j$ $(j=1,2)$ とおく.

任意の measurable function $\phi : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_1 f}, \quad \int_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \phi\, d\mu_f = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{U_1 U_2 f},$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi\, d\mu_{D_j f} = \int_{\mathbb{Z}_p^2} \phi(x_1, x_2)\, x_j\, d\mu_f \quad (j=1,2)$$

が成り立つ.

直接計算により, 作用素 $f \mapsto f_{(\upsilon_1,\upsilon_2)}$, $f \mapsto U_i f$, $f \mapsto D_j f$ $(i, j = 1, 2)$ は, 互いに可換であることがわかる.

補題 4.1. $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T_1, T_2]]$ とし, $g \in \mathbb{C}_p[[T_1, T_2]]$ は $D_1 g = f$ を満たすとする. このとき,

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} x_1^{-1}\, d\mu_f = g(0,0) - 1/p \sum_{a=1}^{p} g(\zeta_p^a - 1, 0)$$

である.

§5. $\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1, \zeta'-1)$ の計算

$\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ を $\mathcal{F}_\infty$ の整数環の完備化とする. $\eta(T) = \Omega_g T + \cdots$ を, Yager [7] で与えられた, $\hat{E}$ から $\mathbb{G}_m$ への $\widehat{\mathcal{O}}_\infty$ 上の同型とし, $i(T)$ を,

$\eta(T)$ の inverse とする．

各 $\beta\in\mathcal{U}_\infty$ 及び $0\leq m\in\mathbb{Z}$ に対し，〔7〕で定義されたように，

$$g_{m,\beta}(T)=\lambda'(T)^{-1}\,d/dT\,\log\,C_{m,\beta}(T)\in\mathcal{O}_m[[T]],$$
$$g_\beta(T_1,T_2)=\lim_{m\to\infty}\sum_{\sigma\in Gal(F_m/k)}(g^{\sigma}_{m,\beta}(T_1))_{g_m}(1+T_2)^{k_2(\sigma)}\in\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$$
$$h_\beta(T_1,T_2)=g_\beta(i(T_1),T_2)$$

とおく．さらに，$(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，

$$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=(U_1h_\beta)^{(i_1-1,-i_2)}(u^{-1}(1+T_1)-1,(1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく。このとき，$\beta\mapsto\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ は，$\mathcal{U}_\infty$ から $\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ への Λ-準同型で（〔7〕定理22），$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}_{\beta^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$ となる．ここに，$\beta^{(i_1,i_2)}$ は，canonical な分解 (2.2) で，$A=\mathcal{U}_\infty$ の場合における β の $\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}$-成分である．

各 $n\geq0$ に対し，V_n を 1 の p^n-乗根全体のなす群とし，$V_\infty=\bigcup_{n\geq0}V_n$ とおく。

以下，本節では，$(\zeta,\zeta')\in V_\infty^2$ に対し，$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1,\zeta'-1)$ を，前節で述べた 2 変数 Γ-変換の性質を用いて計算する．特に，$\beta=\langle e^{(i_1,i_2)}(u)\rangle^{(i_1,i_2)}$ の場合の結果が，§6，§7 で述べる定理の証明で有用となる．

φ_ζ，$\varphi_{\zeta'}$ を，$\varphi_\zeta(u)=\zeta$，$\varphi_{\zeta'}(u)=\zeta'$ を満たす第 2 種 Dirichlet 指標とし，$\varphi_\zeta\omega^{i_1}$，$\varphi_{\zeta'}\omega^{i_2}$ の導手をそれぞれ $p^{n_\zeta(i_1)}$，$p^{n_{\zeta'}(i_2)}$ とする．以下，$\varphi_\zeta\omega^{i_1}$，$\varphi_{\zeta'}\omega^{i_2}$ のうち少なくとも一方は自明でないと仮定

する.

各 $m\geq 0$, $\beta\in\mathcal{V}_\infty$, $\sigma\in Gal(F_m/k)$ に対し,

$$h_{m,\beta,\sigma}(T)=(g_{m,\beta}^{\sigma}(W))_{g_m}\Big|_{W=i(T)}$$

とおく. このとき, $m+1\geq n_{\mathfrak{f}'}(i_2)$ なる m に対して,

$$(\mathcal{U}_1 h_\beta)_{(\varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1},\ \varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2})}\equiv\sum_{\sigma\in Gal(F_m/k)}(\mathcal{U}_1 h_{m,\beta,\sigma}(T_1))_{(\varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1},1)}\left((1+T_2)^{\kappa_2(\sigma)}\right)_{(1,\varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2})}$$
$$(\mathrm{mod}\ \omega_{m+1,2}\,\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]])$$

が成立する. また,

$$D_1\left(\log(C_{m,\beta}^{\sigma}(W))_{g_m}\Big|_{W=i(T_1)}\right)=\Omega_g^{-1}h_{m,\beta,\sigma}(T_1)$$

も成り立つ. 以下 $\zeta_{p^{n+1}}$ は

$$i(\zeta_{p^{n+1}}-1)=u_n=\varepsilon(\Omega_\infty/\pi^{n+1})$$

を満たすようにとられているものとする. このとき, [7]補題 2 を考慮に入れることにより, $m+1\geq n_{\mathfrak{f}'}(i_2)$ なる m に対し, 次の等式が得られる.

$$\mathcal{G}_\beta^{(i_1,i_2)}(\zeta-1,\zeta'-1)$$
$$=\int_{\mathbb{Z}_p^\times\times\mathbb{Z}_p}x_1^{-1}\,d\mu_{(\mathcal{U}_1h_\beta)(\varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1},\ \varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2})}$$
$$=\Omega_g\sum_{\sigma\in Gal(F_m/k)}\left\{\mathcal{U}_1\left(\log(C_{m,\beta}^{\sigma}(W))_{g_m}\Big|_{W=i(T_1)}\right)_{(\varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1},1)}\left((1+T_2)^{\kappa_2(\sigma)}\right)_{(1,\varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2})}\right\}\Bigg|_{(0,0)}$$

$$=\begin{cases}\Omega_g/\tau(\varphi_\mathfrak{f}^{-1}\omega^{-i_1},\zeta_{p^{n_\mathfrak{f}(i_1)}})\cdot\displaystyle\sum_{\sigma\in Gal(F_m/k)}\Bigg(\sum_{a=1}^{p^{n_\mathfrak{f}(i_1)}}\varphi_\mathfrak{f}^{-1}\omega^{-i_1}(a)\,\varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2}(\kappa_2(\sigma)) \\ \qquad\qquad\times\log_p(C_{m,\beta}^{\sigma}(T))_{g_m}\Big|_{T=[a]_{\hat{E}}(u_{n_\mathfrak{f}(i_1)-1})}\Bigg)\quad(\text{if } \varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1}\neq 1) \\ \\ \Omega_g/p\displaystyle\sum_{\sigma\in Gal(F_m/k)}\varphi_{\mathfrak{f}'}^{-1}\omega^{-i_2}(\kappa_2(\sigma))\sum_{a=1}^{p-1}\log_p\left\{C_{m,\beta}(0)^{\sigma}/(C_{m,\beta}^{\sigma}(T))_{g_m}\Big|_{T=[a]_{\hat{E}}(u_0)}\right\} \\ \qquad\qquad(\text{if } \varphi_\mathfrak{f}\omega^{i_1}=1)\end{cases}$$

ここに，$\log_p$ は $\mathbb{C}_p^\times$ 上定義された p-進対数である．

次に，$\beta = \langle e^{(i_1,i_2)}(\mu) \rangle^{(i_1,i_2)}$ $(\mu \in \mathcal{S})$ の場合を考える．

定理 3.1 により，$n, m \geq 0$，$\sigma \in Gal(F_m/k)$，$a \geq 1$ に対し，

$$\left(C^{\sigma}_{m, e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(T)\right)_{g_m}\Big|_{T=[a]_{\hat{G}}(u_n)} = \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1} a z_n; \mu)$$

$$\left(C_{m, e^{(i_1,i_2)}(\mu)}(0)\right)^{\sigma} = \Lambda_m^{(i_1,i_2)}(0;\mu)^{\sigma}$$

となる．

$n+1 \geq n_{\mathfrak{f}}(i_1)$，$m+1 \geq n_{\mathfrak{f}'}(i_2)$ なる n, m に対し，$Gal(K_{n,m}/k)$ の指標 $\varphi_{\mathfrak{f}}^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\mathfrak{f}'}^{(2)}\chi_2^{i_2}$ を，

$$\varphi_{\mathfrak{f}}^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\mathfrak{f}'}^{(2)}\chi_2^{i_2}(\sigma) = \varphi_{\mathfrak{f}}\,\omega^{i_1}(\kappa_1(\sigma)) \cdot \varphi_{\mathfrak{f}'}\,\omega^{i_2}(\kappa_2(\sigma))$$

によって定義する．

$\mathfrak{g} \neq (1)$ を K の整イデアルとするとき，$C \in Cl(\mathfrak{g})$ に対し，$\varphi_{\mathfrak{g}}(C) \in R_{\mathfrak{g}}$ を，Robert [6] で定義された *ray class invariant* とする。このとき，直接計算により，

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(\varepsilon_n^{m+1} z_n, \mathfrak{a})^{k_{n,m}^{(i_1,i_2)}} = N_{K_{n,m}^{(i_1,i_2)}/K_{n,m}}\left(\varphi_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1}}(C_0)^{N\mathfrak{a}} / \varphi_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1}}(C_0)^{\sigma(\mathfrak{a})}\right)^{\sigma_{n,m}^{(i_1,i_2)}},$$

$$\Lambda_m^{(i_1,i_2)}(0, \mathfrak{a})^{k_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{*m+1}}} = N_{F_m^{(i_1,i_2)}/F_m}\left(\varphi_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{*m+1}}(C_0')^{N\mathfrak{a}} / \varphi_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{*m+1}}(C_0')^{\sigma(\mathfrak{a})}\right)$$

が任意の $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ に対して成り立つことがわかる．ここに，

$k_{n,m}^{(i_1,i_2)} = k_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1}}$，$\sigma_{n,m}^{(i_1,i_2)} = \left((\varepsilon_n^{m+1} c^{(i_1,i_2)} \pi^{*m+1} + \pi^{n+1}), R_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1}}/K\right)$，
$\sigma(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}, R_{\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1}}/K)$ で，C_0，C_0' はそれぞれ $Cl(\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{n+1}\mathfrak{p}^{*m+1})$，$Cl(\mathfrak{c}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{p}^{*m+1})$ の *unit ray class* である．

$Cl(\mathfrak{g})$ の任意の指標 χ に対し，

$$S_{\mathfrak{g}}^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in Cl(\mathfrak{g})} \chi^{-1}(C) \log_p(\varphi_{\mathfrak{g}}(C))$$

とおく。

類体論により，$[K_{n,m}^{(i_1,i_2)} : R_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n+1}\mathfrak{g}^{*m+1}}]$ は，n, m に無関係となる．この拡大次数を $d^{(i_1,i_2)}$ と書く．

$\eta_\varsigma^{(i_1,i_2)} = (\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2})'((\varepsilon_{n_\varsigma(i_1)-1}^{m+1}\, c^{(i_1,i_2)}\pi^{*m+1} + \pi^{n_\varsigma(i_1)}))$ とおく．これは m には依存しない．

各 $\mu \in \mathcal{S}$ に対し，

$$h_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{g}} \mu(\alpha)\Big(N\alpha - \omega^{i_1}(\psi_E(\alpha))\,\omega^{i_2}(\overline{\psi}_E(\alpha))$$
$$\times (1+T_1)^{\ell(\psi_E(\alpha))}(1+T_2)^{\ell(\overline{\psi}_E(\alpha))}\Big)$$

とおく．このとき，Robert [6] §2.3 定理2を用いて直接計算することにより，次の定理が得られる．

定理 5.1. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$，$\mu \in \mathcal{S}$，$(\varsigma, \varsigma') \in \mathcal{V}_\infty^2$ とし，$\varphi_\varsigma\omega^{i_1}$，$\varphi_{\varsigma'}\omega^{i_2}$ のうち少なくとも一方は自明でないとする．このとき，$m+1 \geq n_{\varsigma'}(i_2)$ なる $m \geq 0$ に対し，

(1) $\varphi_\varsigma\omega^{i_1} \neq 1$ なら，

$$G_{\langle e_{(\mu)}^{(i_1,i_2)}\rangle^{(i_1,i_2)}}^{(i_1,i_2)}(\varsigma-1, \varsigma'-1) = \frac{\Omega_{\mathfrak{g}}\, d^{(i_1,i_2)}\, \eta_\varsigma^{(i_1,i_2)}\, \varsigma^{\ell(c^{(i_1,i_2)})}\, \varsigma'^{\ell(\overline{\pi}^{n_\varsigma(i_1)})}}{k_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n_\varsigma(i_1)}\mathfrak{g}^{*m+1}}\, \tau(\varphi_\varsigma^{-1}\omega^{-i_1}, \varsigma_{p^{n_\varsigma(i_1)}})}$$

$$\times\, h_\mu^{(i_1,i_2)}(\varsigma-1, \varsigma'-1)\, S^{(p)}_{\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}\mathfrak{g}^{n_\varsigma(i_1)}\mathfrak{g}^{*m+1}}\left((\varphi_\varsigma^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{\varsigma'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)$$

(2) $$G_{\langle e^{(0,i_2)}_{(\mu)}\rangle^{(0,i_2)}}^{(0,i_2)}(0, \varsigma'-1) = \frac{\Omega_{\mathfrak{g}}\, d^{(0,i_2)}\, \omega^{i_2}(\overline{\pi})\, \varsigma'^{\ell(\overline{\pi})}}{p\, k_{\mathfrak{f}^{(0,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}} \cdot h_\mu^{(0,i_2)}(0, \varsigma'-1)$$

$$\times\, (p - \varsigma'^{\ell(\overline{\pi})}\omega^{i_2}(\overline{\pi}))\, S^{(p)}_{\mathfrak{f}^{(0,i_2)}\mathfrak{g}^{*m+1}}\left((\varphi_{\varsigma'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)$$

となる．

次に，$C^{(i_1,i_2)}=f^{(i_1,i_2)}$ と $C^{(i_1,i_2)}=f$ の場合を比較してみよう．$C^{(i_1,i_2)}=f^{(i_1,i_2)}$ のとき，$c^{(i_1,i_2)}$, $e^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\alpha^{(i_1,i_2)}$, $\eta_s^{(i_1,i_2)}$ をそれぞれ $f^{(i_1,i_2)}$, $\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\tilde{\alpha}^{(i_1,i_2)}$, $\tilde{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ と書く。$C^{(i_1,i_2)}=f$ のとき，$c^{(i_1,i_2)}$, $e^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\eta_s^{(i_1,i_2)}$ をそれぞれ，f, $\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)$, $\hat{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ と書く．後者の場合は，$\alpha^{(i_1,i_2)}=1$ である．

[6] §2.3 定理2により，

$$\frac{S^{(p)}_{f g^{\eta_s(i_1)} g^{*\eta_{s'}(i_2)}}\left((\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)}{k_{f g^{\eta_s(i_1)} g^{*\eta_{s'}(i_2)}}}$$

$$=\frac{S^{(p)}_{f^{(i_1,i_2)} g^{\eta_s(i_1)} g^{*\eta_{s'}(i_2)}}\left((\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2})'\right)}{k_{f^{(i_1,i_2)} g^{\eta_s(i_1)} g^{*\eta_{s'}(i_2)}}}\prod_{\substack{\mathfrak{l}:\text{素イデアル}\\ \mathfrak{l}\mid f,\ \mathfrak{l}\nmid f^{(i_1,i_2)}}}\left\{1-(\widetilde{\varphi_s^{(1)}\chi_1^{i_1}\varphi_{s'}^{(2)}\chi_2^{i_2}})'^{-1}(\mathfrak{l})\right\}$$

となる．$f^{(i_1,i_2)}p$ と素な任意の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対し，$\alpha_{\mathfrak{l}}$ を $\mathfrak{l}$ の任意の生成元とする．$\nu_{\mathfrak{l}}^{(i_1,i_2)}=(\widetilde{\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}})'(\mathfrak{l})$, $\varepsilon^{(i_1,i_2)}=\hat{\eta}_s^{(i_1,i_2)}/\tilde{\eta}_s^{(i_1,i_2)}$ とおく．$\varepsilon^{(i_1,i_2)}$ は s には依存しない．$G^{(i_1,i_2)}_{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$, $G^{(i_1,i_2)}_{\langle\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$ の $(T_1,T_2)=(s-1,s'-1)$ における値を比較することにより，次の系が得られる．

系 5.2.

$$G^{(i_1,i_2)}_{\langle\hat{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)=(\tilde{\alpha}^{(i_1,i_2)})^{-1}\cdot\varepsilon^{(i_1,i_2)}\cdot(T_1+1)^{\ell(f)-\ell(f^{(i_1,i_2)})}$$

$$\times\left\{\prod_{\substack{\mathfrak{l}\mid f\\ \mathfrak{l}\nmid f^{(i_1,i_2)}}}\left(1-(\nu_{\mathfrak{l}}^{(i_1,i_2)})^{-1}(1+T_1)^{-\ell(\alpha_{\mathfrak{l}})}(1+T_2)^{-\ell(\bar{\alpha}_{\mathfrak{l}})}\right)\right\}G^{(i_1,i_2)}_{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1,T_2)$$

である．

§6. $\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}$ の構造

本節では，任意の $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{L}^{(i_1,i_2)}=f^{(i_1,i_2)}$ と仮定する。

$n,m\geq 0$ に対し，$C_{n,m}'^{(i_1,i_2)}$ を $\mathcal{U}_{n,m}'$ の部分群とみて，$C_{n,m}^{(i_1,i_2)}=C_{n,m}'^{(i_1,i_2)}\cap\mathcal{U}_{n,m}$ とおき，$\overline{C_{n,m}^{(i_1,i_2)}}$ を $C_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ の閉包とする。$\overline{C_{n,m}^{(i_1,i_2)}}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間を $\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ と書き，

$$\overline{C_{n,m}}=\bigoplus_{(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2}\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}\quad(\subseteq\mathcal{U}_{n,m})$$

とおく。$\overline{C_{n,m}}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間は，$\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ に一致する。

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}=\varprojlim\left(\mathcal{U}_{n,m}/\overline{C_{n,m}}\right)^{(i_1,i_2)}$$

とおく。逆極限はノルムに関するものである。

$D^{(i_1,i_2)}$を $\{\langle\tilde{e}^{(i_1,i_2)}(\mu)\rangle^{(i_1,i_2)}\mid\mu\in\mathcal{S}\}$ によって生成される $\mathcal{U}_\infty$ のΛ-部分加群とする。このとき，

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}\cong\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}/D^{(i_1,i_2)}$$

となる。

Yager [7]で，Λ-単準同型

$$W^{(i_1,i_2)}:\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)}\longrightarrow\Lambda$$

が構成され，さらに，$\phi^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\in(\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]])^\times$ が存在して，

$$g_\beta^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=\phi^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\,W^{(i_1,i_2)}(\beta)\qquad(\forall\beta\in\mathcal{U}_\infty^{(i_1,i_2)})$$

となることが証明された。$\mathcal{H}^{(i_1,i_2)}=\mathrm{Im}\,W^{(i_1,i_2)}$ とおく。$H^{(i_1,i_2)}$を，$\{h_\mu^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\,;\,\mu\in\mathcal{S}\}$ によって生成されるΛのイデアルとする。$(i_1,i_2)\neq(0,0),(1,1)$ のとき，$H^{(i_1,i_2)}=\Lambda$. $H^{(0,0)}=T_1\Lambda+T_2\Lambda$,

$H^{(1,1)} = (T_1+1-u)\Lambda + (T_2+1-u)\Lambda$ である．（[7] 補題28）

定理6.1. 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$g^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) \in \Lambda$ が存在して，

$$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)} \cong \mathcal{H}^{(i_1,i_2)} / g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2) H^{(i_1,i_2)}$$

となる．

（証明）　$W^{(i_1,i_2)}(D^{(i_1,i_2)}) = g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)\, H^{(i_1,i_2)}$ となる $g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2) \in \Lambda$ を構成すればよい．

(1)　$(i_1,i_2) = (0,0)$ のとき；定理5.1により，$e^{(0,0)} \in D^{(0,0)}$ が存在して，

$$\mathcal{G}^{(0,0)}_{e^{(0,0)}}(T_1,T_2)/T_1 \in \hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$$

かつ，任意の $(\zeta, \zeta') \in (V_\infty - \{1\})^2$ に対し，

$$\mathcal{G}^{(0,0)}_{e^{(0,0)}}(\zeta-1, \zeta'-1)/\zeta-1 = \frac{\Omega_g\, \mathcal{X}^{(0,0)} \zeta'^{\ell(\pi^{n_{\zeta'}(0)})}}{k_{g^{n_\zeta(0)} g^{*n_{\zeta'}(0)}}\, \tau(\varphi_\zeta^{-1}, \zeta_{p^{n_\zeta(0)}})} S^{(p)}_{g^{n_\zeta(0)} g^{*n_{\zeta'}(0)}}\left((\varphi_\zeta^{(1)} \varphi_{\zeta'}^{(2)})'\right)$$

となる．さらに，任意の $\mu \in \mathcal{S}$ に対して，

$$\mathcal{G}^{(0,0)}_{\langle \tilde{e}^{(0,0)}(\mu) \rangle^{(0,0)}}(T_1,T_2) = h^{(0,0)}_\mu(T_1,T_2) \cdot 1/T_1 \cdot \mathcal{G}^{(0,0)}_{e^{(0,0)}}(T_1,T_2)$$

が成り立つ．従って，$g^{(0,0)}(T_1,T_2) = W^{(0,0)}(e^{(0,0)})/T_1$ とおくことにより，

$$W^{(0,0)}(D^{(0,0)}) = g^{(0,0)}(T_1,T_2)\, H^{(0,0)}$$

が成立する。

(2)　$(i_1,i_2) = (1,1)$ のとき；$\mu_1, \cdots, \mu_t \in \mathcal{S}$ 及び $f_1, \cdots, f_t \in \Lambda$ が存在して，$T_1+1-u = \sum_{j=1}^{t} f_j(T_1,T_2)\, h^{(1,1)}_{\mu_j}(T_1,T_2)$ となる．

$$\tilde{e}^{(1,1)} = \prod_{j=1}^{t} f_j \langle \tilde{e}^{(1,1)}(\mu_j) \rangle^{(1,1)}, \quad \hat{e}^{(1,1)} = \prod_{j=1}^{t} f_j \langle \hat{e}^{(1,1)}(\mu_j) \rangle^{(1,1)}$$

とおく．このとき，[7]定理29の証明から，$G^{(1,1)}_{\tilde{e}^{(1,1)}}(T_1, T_2) \in (T_1+1-u)\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ となり，さらに系5.2から $G^{(1,1)}_{\hat{e}^{(1,1)}}(T_1, T_2) \in (T_1+1-u)\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ となることがわかる．よって，$g^{(1,1)}(T_1, T_2) = W^{(1,1)}(\hat{e}^{(1,1)})/T_1+1-u$ とおくと，(1)と同様に，

$$W^{(1,1)}(D^{(1,1)}) = g^{(1,1)}(T_1, T_2)H^{(1,1)}$$

が成立する．

(3) $(i_1, i_2) \neq (0,0), (1,1)$ のとき；(1),(2)の場合と同様に，$e^{(i_1,i_2)} \in D^{(i_1,i_2)}$ が存在して

$$G^{(i_1,i_2)}_{\langle e^{(i_1,i_2)}(\mu) \rangle^{(i_1,i_2)}}(T_1, T_2) = h^{(i_1,i_2)}_{\mu}(T_1, T_2) G^{(i_1,i_2)}_{e^{(i_1,i_2)}}(T_1, T_2) \quad (\forall \mu \in \mathcal{S})$$

となる．$g^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2) = W^{(i_1,i_2)}(e^{(i_1,i_2)})$ とおけばよい．

§7. p-進 L-関数との関係

Yager[7]では，前節の $\overline{C_{n,m}^{(1,0)}}$ の $\chi_1^{i_1}\chi_2^{i_2}$-固有空間を $\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ とおいて，Λ-加群 $\varprojlim \mathcal{U}_{n,m}^{(i_1,i_2)}/\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ の characteristic power series と p-進 L-関数との関連性が考察された．$\overline{C}_{n,m}^{(i_1,i_2)}$ を，前節で述べたように定義すると，$\mathcal{Y}_\infty^{(i_1,i_2)}$ の characteristic power series $g^{(i_1,i_2)}(T_1, T_2)$ は，原始的な p-進 L-関数の補間級数と，$\hat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1, T_2]]$ で同伴になる．このことについて，これから説明する．

各 $k \geq 1$ に対し，$L(\overline{\psi}_E^k, s)$ を，量指標 $\overline{\psi}_E^k$ に対する原始的な Hecke L-関数とする．また，$L_f(\overline{\psi}_E^k, s)$ を，$\overline{\psi}_E^k$ を mod f の量指標とみたときの Hecke L-関数とする．任意の $0 \leq j < k$ に対し，

(7.1) $$L_\infty(\overline{\psi}_E^{\,k+j}, k) = \left(1-\psi_E(\mathfrak{p})^{k+j}/N\mathfrak{p}^{j+1}\right)\left(1-\overline{\psi}_E(\mathfrak{p}^*)^{k+j}/N\mathfrak{p}^{*k}\right) \times \left(2\pi/\sqrt{d_K}\right)^j \Omega_\infty^{-(k+j)} \cdot L(\overline{\psi}_E^{\,k+j}, k)$$

(7.2) $$L_{\mathfrak{f},\infty}(\overline{\psi}_E^{\,k+j}, k) = \left(1-\psi_E(\mathfrak{p})^{k+j}/N\mathfrak{p}^{j+1}\right)\left(1-\overline{\psi}_E(\mathfrak{p}^*)^{k+j}/N\mathfrak{p}^{*k}\right) \times \left(2\pi/\sqrt{d_K}\right)^j \Omega_\infty^{-(k+j)} L_{\mathfrak{f}}(\overline{\psi}_E^{\,k+j}, k)$$

とおく．Damerell の定理により，(7.1), (7.2) の右辺は代数的数になるので，$\mathbb{C}_p$の元ともみられる．このとき，各 $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ が $\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ の中に存在して，$k_1>-k_2\geq 0$, $(k_1,k_2)\equiv(i_1,i_2) \pmod{p-1}$ なる任意の $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$ に対し，

(7.3) $$\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1,u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_{\mathfrak{p}}^{k_2-k_1} L_{\mathfrak{f},\infty}(\overline{\psi}_E^{\,k_1-k_2}, k_1)$$

となる．([7] 定理29)

(7.4) $$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)=\prod_{\mathfrak{l}\mid\mathfrak{f},\ \mathfrak{l}\nmid\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}} \left(1-\nu_{\mathfrak{l}}^{(i_1,i_2)\,-1}(1+T_1)^{-\ell(\sigma_{\mathfrak{l}})}(1+T_2)^{-\ell(\bar{\sigma}_{\mathfrak{l}})}\right)^{-1}\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$$

とおく．このとき，次の定理が成立する．

定理7.1. 各 $(i_1,i_2)\in(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し，$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$は，$g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ と $\widehat{\mathcal{O}}_\infty[[T_1,T_2]]$ で同伴である．さらに，$k_1, k_2\in\mathbb{Z}$が，$k_1>-k_2\geq 0$, $(k_1,k_2)\equiv(i_1,i_2) \pmod{p-1}$ を満たすとき，

(7.5) $$\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(u^{k_1}-1,u^{k_2}-1) = (k_1-1)!\,\Omega_{\mathfrak{p}}^{k_2-k_1} L_\infty(\overline{\psi}_E^{\,k_1-k_2}, k_1)$$

となる．

（証明） 前半は，$g^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$, $\mathcal{G}_{\mathfrak{f}}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$, $\mathcal{G}^{(i_1,i_2)}(T_1,T_2)$ の構成法と，系5.2 からわかる．後半は，$\psi_E^{k_1-k_2}$ の導手が $\mathfrak{f}^{(i_1,i_2)}$であることと，L-関数の Euler 積分解から得られる．

文献

[1] J. Coates and A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc (series A) 26, (1978), 1-25.

[2] R. Coleman, Division values in local fields, Invent. Math. 53 (1979), 91–116.

[3] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01.

[4] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p-adic L-functions, to appear in Mem. Facu. Scie., Kyushu Univ.

[5] S. Lang, Cyclotomic fields, Springer-Verlag, New York 1978.

[6] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).

[7] R. Yager, On two variable p-adic L-functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411–449.